TD 2 :

I - Normes et distances sur $\mathbb{R}^n$

Exercice 1 : (Equivalence des normes usuelles)

Remarque : il suffit de montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty$$

1) $\|x\|_\infty = \max \{|x_1|, \dots, |x_n|\}$

$= \sqrt{(x_{j_0})^2}$ où j_0 est tel que $|x_{j_0}| = \|x\|_\infty$

$\leq \sqrt{(x_1)^2 + \dots + (x_{j_0})^2 + \dots + (x_n)^2} = \|x\|_2$

2) $\|x\|_2^2 = (x_1)^2 + \dots + (x_n)^2$

$\leq |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 + 2 \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} |x_i|\,|x_j|$

$= (|x_1| + \dots + |x_n|)^2 = \|x\|_1^2$

et on a bien $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$

3) $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$

$\leq n \max \{|x_1|, \dots, |x_n|\} = n\,\|x\|_\infty$

Exercice 2 : Soit $a, b \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$

$$N_{a,b} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \max\{|bx+y|, |(a+b)x+y|\}$$

1) séparation : on a bien $N_{a,b}(x,y) \geq 0$. De plus :

$$N_{a,b}(x,y) = 0 \quad \underline{\text{ssi}} \quad \begin{cases} bx+y=0 \\ (a+b)x+y=0 \end{cases}$$

$$\text{ssi} \quad \begin{cases} x = -y/a \qquad a \neq 0 \\ -\frac{a+b}{a}y + y = 0 \end{cases}$$

$$\text{ssi} \quad x = y = 0.$$

homogénéité : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $N_{a,b}(\lambda x, \lambda y) = \max\{|b\lambda x + \lambda y|, |(a+b)\lambda x + \lambda y|\}$
$= |\lambda| \max\{ \text{——} \} = |\lambda| N_{a,b}(x,y)$

Inégalité triangulaire : $\forall u, v \in \mathbb{R}^2$

$$N(u_1+v_1, u_2+v_2) = \max\{|b(u_1+v_1) + (u_2+v_2)|, |(a+b)(u_1+v_1) + u_2+v_2|\}$$
$$\leq \max\{|bu_1+v_2| + |bv_1+v_2|, |(a+b)u_1+u_2| + |(a+b)v_1+v_2|\}$$
$$\leq \max\{|bu_1+v_2|, |(a+b)u_1+u_2|\} + \max\{|bv_1+v_2|, |(a+b)v_1+v_2|\}.$$
$$\leq N(u_1, u_2) + N(v_1, v_2).$$

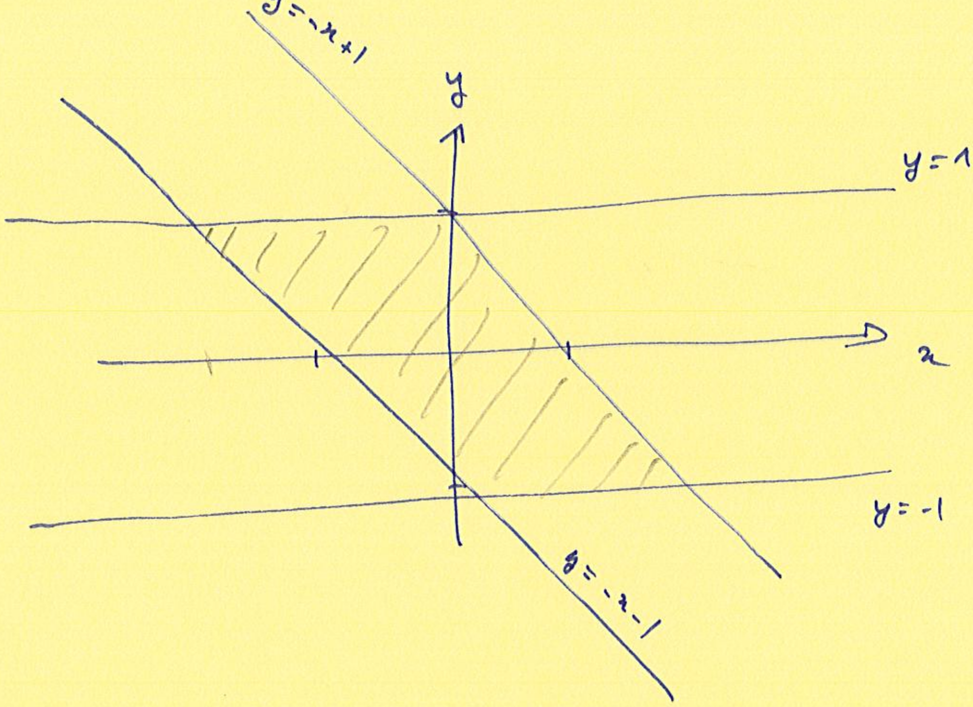
2) On pose $a=1$ et $b=0$ Et on a la norme :

$$N(x,y) = \max\{|y|, |x+y|\}$$

remarque : $N(x,y) = \| A \binom{x}{y} \|_\infty$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc la boule unité est l'image par A^{-1} de la boule unité $\|.\|_\infty$ ...

$N(x,y) \leq 1$ ssi $\begin{cases} |y| \leq 1 \\ \text{et} \\ |x+y| \leq 1 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} -1 \leq y \leq 1 \\ -1 \leq x+y \leq 1 \end{cases}$

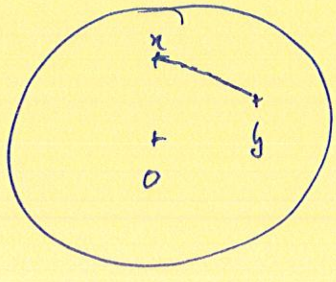


Exercice 3 :

Soit $(E, \|.\|)$ un evn.

$\forall x, y \in B(0,1)$ et $\forall \lambda \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1-\lambda) y\| &\leq \|\lambda x\| + \|(1-\lambda) y\| \\ &\leq |\lambda| \|x\| + |1-\lambda| \|y\| \\ &\leq |\lambda| + |1-\lambda| \quad \text{car } x \text{ et } y \in B(0,1) \\ &= \lambda + 1 - \lambda \quad \text{car } 1 \geq \lambda \geq 0 \\ &\leq 1 \end{aligned}$$



Ex 4

1) Symétrie : evident : $\|\vec{AB}\| = \|\vec{BA}\|$ et + commutative.

Séparation Si $d(A,B) = 0$

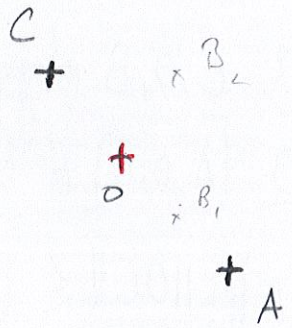
cas 1 : A, B, O alignés alors $\|\vec{AB}\| = 0$ d'où $A = B$

cas 2 $\|\vec{OA}\| + \|\vec{OB}\| = 0$ donc (Σ de ≥ 0)

$\|\vec{OA}\| = 0$ et $\|\vec{OB}\| = 0$

$A = O = B$.

Triangle : $A, B, C \in \mathbb{R}^2$.



cas 1 A, C, O alignés

$d(A,C) = \|AC\|$

cas 1.1 A, B, O (et donc C) sont alignés

$\|AC\| \leq \|AB\| + \|BC\|$ ($\| \ \|$ est une norme)

$d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$

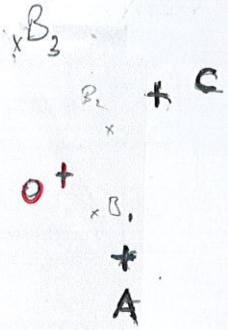
cas 1.2 $B \notin (A,C)$.

$\|AC\| \leq \|AO\| + \|OC\| \leq \|AO\| + \|OC\| + 2\|OB\|$

$$d(A,C) \leq \underbrace{\|OA\| + \|OB\|}_{d(A,B)} + \underbrace{\|OC\| + \|OB\|}_{d(B,C)}$$

Cas 2 A, C non alignés.

$$d(A,C) = \|OA\| + \|OC\|$$



cas 2.1 A, O, B alignés : $d(A,B) = \|AB\|$

et B, O, C sont forcement non alignés :

$$d(B,C) = \|OB\| + \|OC\|$$

$$d(A,C) = \|OA\| + \|OC\| \leq \|OB\| + \|BA\| + \|OC\|$$
$$\leq d(A,B) + d(B,C)$$

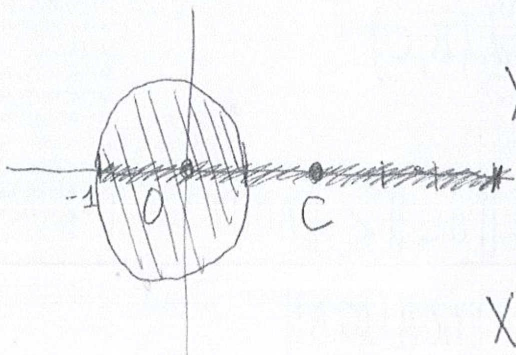
cas 2.2 C, O, B alignés : idem.

cas 2.3 (A, O, B) et (A, O, C) non alignés

$$d(A,C) = \|OA\| + \|OC\| \leq \underbrace{\|OA\| + \|OB\|}_{d(A,B)} + \underbrace{\|OC\| + \|OB\|}_{d(B,C)}$$

2)

$$\mathbb{B} = \{X \mid d(X,C) \leq 3\}$$



$X \in \mathbb{B}$,

cas 1 $X \in (OC) = \{\text{abscisse}\}$

$X \in \mathbb{B} \Leftrightarrow \|\vec{CX}\| \leq 3$

$X \in \mathbb{R}$ et $\|\vec{CX}\| \leq 3$

cas 2 $X \notin (OC)$

$$X \in \mathcal{B} \Leftrightarrow \|\vec{OX}\| + \overbrace{\|\vec{OC}\|}^{2} \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \|OX\| \leq 1$$

3) $u_m = \left(1, \frac{1}{m+1}\right)$

$$\|u_m - \ell\| = \left\|\left(0, \frac{1}{m+1}\right)\right\| = \frac{1}{m+1} \longrightarrow 0$$

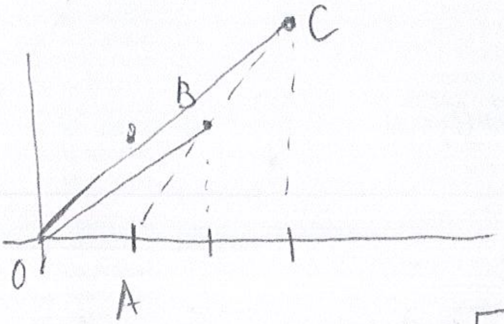
donc $u_m \longrightarrow \ell$.

$$d(u_m, \ell) = d\left(\left(1, \frac{1}{m+1}\right), (1,0)\right)$$

On remarque que $u_m, 0, \ell$ ne sont jamais alignés.

$$d(u_m, \ell) = \|Ou_m\| + \|O\ell\| = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{m+1}\right)^2} + 1 \to 2$$

4) $A = (1,0)$, $B = (2,1)$, $C = (3,2)$



alors $\vec{AB} = (1,1)$

$\vec{AC} = (2,2)$

$\vec{AC} = 2\vec{AB}$

~~Si d(A,B) = d(A~~

$d(A,B) = \|0A\| + \|0B\| = 1 + \sqrt{5}$

$d(A,C) = \|0A\| + \|0C\| = \cancel{1 + 2\sqrt{2}}$

$1 + \sqrt{3^2 + 2^2} = 1 + \sqrt{13}$.

Si $d(A,B)$ provenait d'une norme, $\mathcal{N}$ on aurait ④

$$1+2\sqrt{2} = d(A,C) = \mathcal{N}(AC) = \mathcal{N}(2AB)$$

$$= 2\mathcal{N}(AB) = 2d(A,B) = 2+2\sqrt{5} \quad \text{(abs)}$$ $\mathcal{N}$ ne serait pas homogène

---

Ex7

Préambule $u_n = (x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{R}^3$ CV (vers (x,y,z)) $\Leftrightarrow$ x_n, y_n et z_n CV vers x, y, z

(cours ou exo ?)

① $\frac{(-1)^n}{n^a}$ CV $\Leftrightarrow a > 0$ (sinon elle alterne)

$\frac{1}{n^b}$ CV $\Leftrightarrow b \geq 0$ $\left(\begin{array}{l} \to 0 \text{ si } b > 0 \\ \to 1 \text{ si } b = 0 \end{array} \right.$

c^n CV $\Leftrightarrow c \in]-1, 1]$

u_n CV $\Leftrightarrow a > 0, b \geq 0, c \in]-1, 1]$

~~$u_n \to$ {(0,0,0) si a>0, b>0,~~

② $\sum_1^n \frac{1}{k^a}$ CV $\Leftrightarrow a > 1$ (Riemann)

Exercice 5 : Inégalité de Hölder et Minkowski.

$p, q \in [1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff q = \frac{p}{p-1}$

1) Mq $\forall x, y > 0$ on a $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$. (1)

Soit $b > 0$ fixé. On pose

$$f_b(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{b^q}{q} - bx \quad \text{définie pour } x > 0$$

on a $f_b'(x) = x^{p-1} - b$ ce qui donne le tableau de variation

	0		$b^{1/p-1}$		$+\infty$
signe f_b'		$-$	0	$+$	
variation de f_b		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$$f_b\left(b^{\frac{1}{p-1}}\right) = \frac{b^q}{p} + \frac{b^q}{q} - b^q$$

$$= b^q\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\right)$$

$$= 0$$

et on a pour tout $b > 0$ $f_b(x) \geq 0$ $\forall x > 0$

ce qui montre (1).

remarque : on peut le montrer avec la convexité de $\exp(\cdot)$ mais on a pas les outils

2) Soit $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \sum_{i=1}^n \frac{|a_i|^p}{p} + \frac{|b_i|^q}{q}$$

on pose $A = \sum_{i=1}^n |a_i|^p$ et $B = \sum_{i=1}^n |b_i|^q$

Si $A = 0$ ou $B = 0$ ou $a_1 = a_2 = \dots a_n = 0$

et l'inégalité est triviale.

Si $A > 0$ et $B > 0$ on a

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{A^{1/p}} \frac{b_i}{B^{1/q}} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i|^p}{pA} + \frac{|b_i|^q}{qB}$$

$$= \frac{\cancel{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p}}{p\cancel{A}} + \frac{\cancel{\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q}}{q\cancel{B}} = 1$$

et on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq A^{1/p} B^{1/q} = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{1/q}$

remarque : pour $p = q = 2$ on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui sera traitée au chapitre suivant.

3) on peut remarquer que $\forall i = 1, \dots, n$ on a :

$$|a_i + b_i|^p \leq (|a_i| + |b_i|)^p = (|a_i| + |b_i|)(|a_i| + |b_i|)^{p-1}$$

$$= |a_i|(|a_i| + |b_i|)^{p-1} + |b_i|(|a_i| + |b_i|)^{p-1}$$

on a donc

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|(|a_i| + |b_i|)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |b_i|(|a_i| + |b_i|)^{p-1}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} (|a_i| + |b_i|)^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} (|a_i| + |b_i|)^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

remarque : $(p-1)q = (p-1) \times \dfrac{p}{p-1} = p$ et $q = 1 - \dfrac{1}{p}$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} (|a_i| + |b_i|)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

(*)
$$\times \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{1/q}$$

* Si $A = \sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p = 0$ tous les a_i et b_i sont nuls et l'inégalité est claire.

* Si $A > 0$ alors on peut simplifier (*) en

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (|a_i| + |b_i|)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{1/q}$$

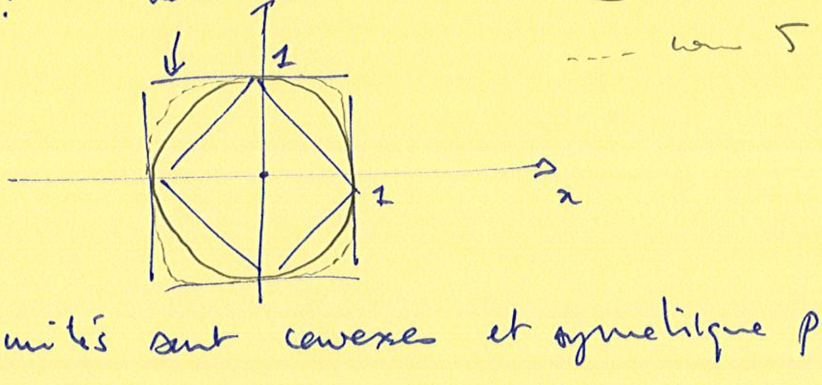
<u>Exercice 6</u>: Soit $p \geq 1$

1) . il est claire que $N_p(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ et $N_p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

. $N_p(\lambda x) = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i|^p\right)^{1/p} = \left(|\lambda|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} = |\lambda| N_p(x)$

. cf inégalité de minkowski.

2) quelques boules :



remarque : les boules unités sont convexes et symetrique par rapport à 0.

3) on a $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$N_\infty(x) = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

$$= |x_{j_0}| \quad \text{où } j_0 \text{ est tq } |x_{j_0}| = N_\infty(x)$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} = N_p(x)$$

De plus ⑦

$$N_p(x) = \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(n\left(\max_{i=1,n}\{|x_i|\}\right)^p\right)^{1/p}$$

$$\leq n^{1/p} N_\infty(x).$$

et a a $\forall p \geq 1$

$$N_\infty(x) \leq N_p(x) \leq N_\infty(x) \times \underbrace{n^{1/p}}_{\to 1 \text{ qd } p \to \infty}$$

le théorème des gendarmes donne $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

$$N_p(x) \longrightarrow N_\infty(x) \quad \text{qd } p \to +\infty.$$

Ex 4 (1)

1) Symétrie : evident : $\|\vec{AB}\| = \|\vec{BA}\|$ et + commutative.

Séparation Si $d(A,B) = 0$

cas 1 : A, B, O alignés alors $\|\vec{AB}\| = 0$ d'où $A = B$

cas 2 $\|\vec{OA}\| + \|\vec{OB}\| = 0$ donc (Σ de ≥ 0)

$\|\vec{OA}\| = 0$ et $\|\vec{OB}\| = 0$

$A = O = B$.

Triangle : $A, B, C \in \mathbb{R}^2$

cas 1 A, C, O alignés

$d(A,C) = \|AC\|$

cas 1.1 $A, B,$ ~~O~~ (et donc C) sont alignés

$\|AC\| \leq \|AB\| + \|BC\|$ ($\|\ \|$ est une norme)

$d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$

cas 1.2 $B \notin (A,C)$

$\|AC\| \leq \cancel{\|AO\|}\ \|AO\| + \|OC\| \leq \|AO\| + \|OC\| + 2\|OB\|$

$d(A,C) \leq \underbrace{\|OA\| + \|OB\|}_{d(A,B)} + \underbrace{\|OC\| + \|OB\|}_{d(B,C)}$

Cas 2 A, C non alignés. ②

$d(A,C) = \|OA\| + \|OC\|$

cas 2.1 A, O, B alignés : $d(A,B) = \|AB\|$

et B, O, C sont forcement non alignés.

$$d(B,C) = \|OB\| + \|OC\|$$

$$d(A,C) = \|OA\| + \|OC\| \leq \|OB\| + \|BA\| + \|OC\|$$
$$\leq d(A,B) + d(B,C)$$

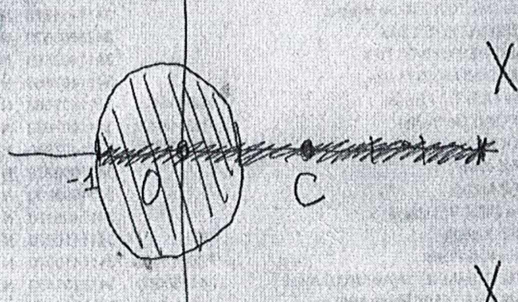
cas 2.2 C, O, B alignés : idem.

cas 2.3 (A, O, B) et (A, O, C) non alignés

$$d(A,C) = \|OA\| + \|OC\| \leq \underbrace{\|OA\| + \|OB\|}_{d(A,B)} + \underbrace{\|OC\| + \|OB\|}_{d(B,C)}.$$

2)

$$\mathbb{B} = \{X \mid d(X,C) \leq 3\}$$



$X \in \mathbb{B}$,

cas 1 $X \in (OC) = \{\text{abscisse}\}$

$X \in \mathbb{B} \Leftrightarrow \|\vec{CX}\| \leq 3$

$X \in \mathbb{R}$ et $\|\vec{CX}\| \leq 3$

cas 2 $X \notin (OC)$

$$X \in \mathcal{B} \iff \|\overrightarrow{OX}\| + \overbrace{\|\overrightarrow{OC}\|}^{2} \leq 3$$

$$\iff \|OX\| \leq 1.$$

3) $u_n = \left(1, \frac{1}{n+1}\right)$

$$\|u_n - l\| = \left\|\left(0, \frac{1}{n+1}\right)\right\| = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$$

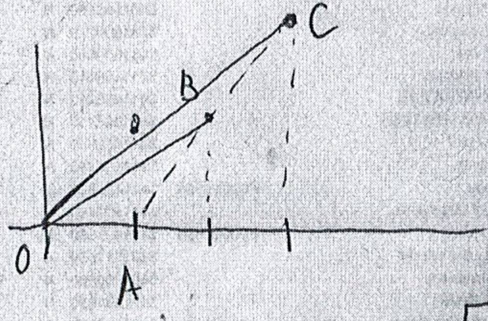
donc $u_n \longrightarrow l$.

$$d(u_n, l) = d\left(\left(1, \frac{1}{n+1}\right), (1,0)\right)$$

On remarque que u_n, O, l ne sont jamais alignés.

$$d(u_n, l) = \|Ou_n\| + \|Ol\| = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2} + 1 \longrightarrow 2$$

4) $A = (1,0)$, $B = (2,1)$, $C = (3,2)$



alors $\overrightarrow{AB} = (1,1)$

$\overrightarrow{AC} = (2,2)$

$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$

$$d(A,B) = \|OA\| + \|OB\| = 1 + \sqrt{5}$$

$$d(A,C) = \|OA\| + \|OC\| = \cancel{1 + 2\sqrt{2}}$$

$$= 1 + \sqrt{3^2 + 2^2} = 1 + \sqrt{13}$$

Si $d(A,B)$ provenait d'une norme, $\mathcal{N}$ on aurait (4)

$$1+2\sqrt{2} = d(A,C) = \mathcal{N}(AC) = \mathcal{N}(2AB)$$

$$= 2\mathcal{N}(AB) = 2d(A,B) = 2+2\sqrt{5} \quad \text{(abs)}$$

$\mathcal{N}$ ne serait pas homogène

Ex 7

Préambule $u_n = (x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{R}^3$ CV $\Leftrightarrow$ x_n, y_n et z_n CV vers x, y, z
(vers (x,y,z))

(cours ou exo ?)

① $\dfrac{(-1)^n}{n^a}$ CV $\Leftrightarrow a > 0$ (sinon elle alterne)

$\dfrac{1}{n^b}$ CV $\Leftrightarrow b \geq 0$ $\left(\begin{array}{l} \to 0 \text{ si } b>0 \\ \to 1 \text{ si } b=0 \end{array} \right.$

c^n CV $\Leftrightarrow c \in]-1,1]$

u_n CV $\Leftrightarrow a>0, b\geq 0, c \in]-1,1]$

~~$u_n \to (0,0,0)$ si $a>0$, $b>0$,~~

② $\displaystyle\sum_1^n \frac{1}{k^a}$ CV $\Leftrightarrow a > 1$ (Riemann)

$\sum \frac{b^k}{k!}$ CV ~~ps~~ (~~vers~~ e^b) pour tout b

c CV pour tout c (suite constante)

u_n CV $\Leftrightarrow a>1,\ b, c \in \mathbb{R}$

③ $\sum a^k, \sum a^{2k}, \sum a^{3k}$ CV $\Leftrightarrow a \in]-1,1[$

(séries géométriques) raisons a, a^2, a^3

u_n CV $\Leftrightarrow a \in]-1,1[$

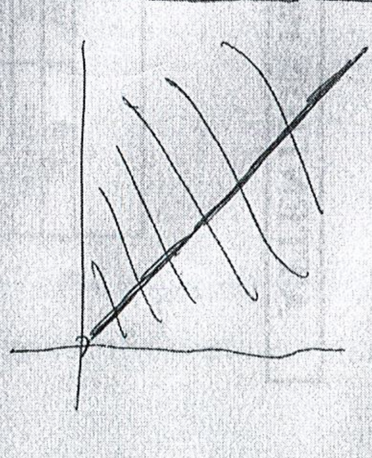
Sous suite CV^{te} :

① u_{2n} et u_{2n+1} si $a \geqslant 0$ et $c \in [-1,1]$ et $b \geqslant 0$ toutes leur ss. suites

② N'importe quelle ss. suite.

③ ——

Ex8 ① $f(x,y) = \dfrac{\ln(x) + \ln(y)}{x-y}$



Définie pour $x, y > 0$, $x \neq y$.

$\mathcal{D} = \{(x,y),\ x>0, y>0, x \neq y\}$

$\mathcal{D}$ est ouvert

diagonale fermée car c'est $H^{-1}(\{0\})$ avec $H(x,y)=x-y$ continue

Arg 1 $\mathcal{D} = G^{-1}\left(]0,+\infty[\times]0,+\infty[\times\mathbb{R}\setminus\Delta\right)$

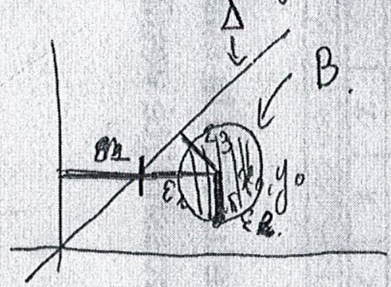
où $G(x,y)=(x,y,x-y)$ continue

Arg 2 : A la main.

$(x_0,y_0)\in\mathcal{D}$, $\varepsilon_1=\frac{x_0}{2}>0$, $\varepsilon_2=\frac{y_0}{2}>0$

$\varepsilon_3 = d((x_0,y_0),\Delta)$

$\varepsilon=\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ alors $B((x_0,y_0),\varepsilon[\subset\mathcal{D}$.



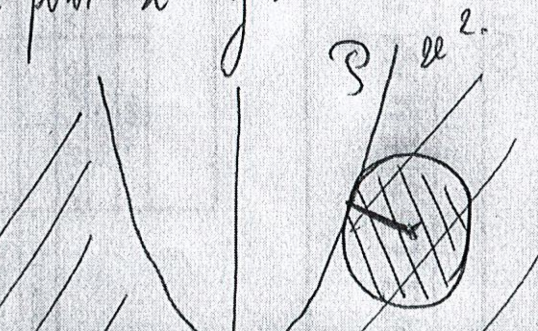
② $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2-y}}$ définie pour $x^2-y>0$

$\mathcal{D}=\{(x,y), y<x^2\}$

ouvert : $G^{-1}(]0,+\infty[)$

avec $G(x,y)=x^2-y$ continue

~~(ou à faire à la main)~~



ou $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}$ fermé :

Soit $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}$ tq $(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y)$

alors $x_n \to x$, $y_n \to y$ et

on a $x_n^2 \leq y_n$ (car $(x_n, y_n) \notin \mathcal{D}$)

passage à la limite :

$x^2 \leq y$ d'où $(x, y) \in \mathcal{D}$

3 $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$ définie pour : a) $x \neq y$

b) $\dfrac{x+y}{x-y} \geq 0$

<u>Etude de b</u> : $\dfrac{x+y}{x-y} \geq 0 \iff \begin{cases} (x+y \geq 0 \text{ et } x-y \geq 0) \\ \text{ou} \\ (x+y \leq 0 \text{ et } x-y \leq 0) \end{cases}$

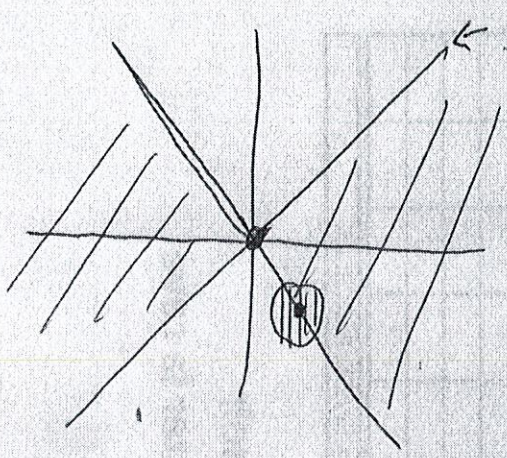
$\iff \begin{cases} y \leq x \text{ et } y \geq -x \\ \text{ou} \\ y \leq -x \text{ et } y \geq x. \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -x \leq y \leq x. & (\Rightarrow x \geq 0) \\ \text{ou} \\ x \leq y \leq -x. & (\Rightarrow x \leq 0) \end{cases}$

$\iff |y| \leq |x|$

⑧

$\mathcal{D} : \{(x,y),\ |y| \leqslant |x|\}\ x \neq y\}$ ni ouvert, ni fermé



pas ouvert : $x_0 = (1,-1) \in \mathcal{D}$, $\varepsilon > 0$,

$(1, -1-\frac{\varepsilon}{2}) \in B(x_0, \varepsilon/2[\cap \mathcal{D}^c \rightsquigarrow$ pas de boule de centre $x_0 \subset \mathcal{D}$.

pas fermé : $(\frac{1}{n}, 0) \in \mathcal{D} \longrightarrow 0 \notin \mathcal{D}$.

④ $f(x,y) = \ln\left((16-x^2-y^2)(x^2+y^2-4)\right)$

définie si :

a) $16-x^2-y^2 > 0$ et $x^2+y^2-4 > 0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 < 16$ et $4 < x^2+y^2$

$\Leftrightarrow 2 < \|(x,y)\| < 4$.

ou

b) $16 - x^2 - y^2 \leq 0$ et $x^2 + y^2 - 4 \leq 0$.

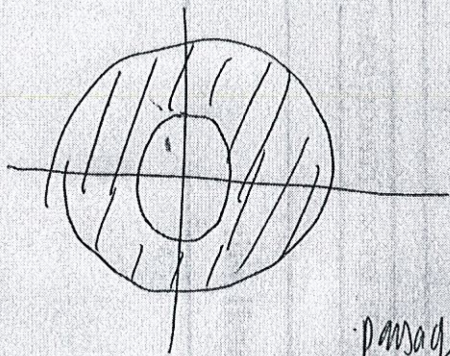
$\Leftrightarrow$ $16 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ (abs)

$\mathcal{D} = \{(x,y),\ 2 \leq \|(x,y)\| \leq 4\}$ ~~fermé~~ : ouvert

utilise l'exo 8

$\mathcal{D}^c = \bar{B}_2(0) \cup (B_4(0))^c$

union de 2 fermés est fermé.



~~$(x_n, y_n) \in \mathcal{D} \to (x,y)$~~

~~alors $\|(x_n,y_n)\| \to \|(x,y)\|$~~

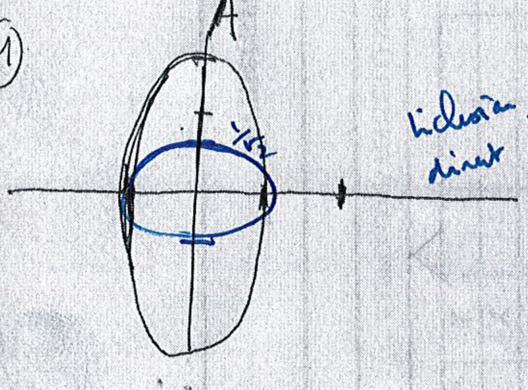
~~$2 \leq \|(x_n,y_n)\| \leq 4$~~

~~passage à la limite~~

~~$2 \leq \|(x,y)\| \leq 4$~~

Ex 9

1)



$\bar{A} = \{x^2 + 2y^2 \leq 1\}$

inclusion direct

$\subset$: $(x,y) \in \bar{A}$, il existe $(x_n, y_n) \in A$, $(x_n,y_n) \to (x,y)$

$x_n^2 + 2y_n^2 < 1$

passage à limite $x^2 + 2y^2 \leq 1$.

$(1,0) \in \bar{A}$

$(0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \in \bar{A}$

inclusion réciproque.

$\supset$: (x,y) tq $x^2+2y^2 \leq 1$ (10)

$\underline{x>0}$ $\quad x_n = x - \frac{1}{n}$, $y_n = y$. $\quad (x_n, y_n) \to (x,y)$

Pour n grand $\left(\frac{1}{n} < x\right)$ on a

$$x_n^2 + 2y_n^2 = \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + 2y^2 < x^2 + 2y^2 \leq 1$$

d'où $(x_n, y_n) \in A$, $\to (x,y) \in \overline{A}$

$\underline{x<0}$ idem avec $\left(x + \frac{1}{n}, y\right)$

$\underline{x=0}$: $y > 0$, idem avec $\left(x, y - \frac{1}{n}\right)$

$y < 0$ ———— $\left(x, y + \frac{1}{n}\right)$

$y = 0$ $\quad (0,0) \subset A \subset \overline{A}$

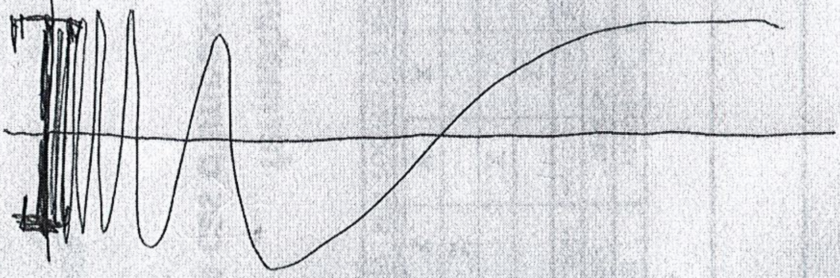
$\forall a \in A$

$u_n = a$

$\lim_n u_n = a$

$A \subset \overline{A}$

2)



$\overline{A} = A \cup \{0\} \times [-1,1]$

$(0,y) \in A \times \{0\} \times [-1,1]$

$\supset$: $y \in [-1,1]$, $\quad t_n = \frac{1}{\alpha + 2k\pi} = \frac{1}{\alpha + 2\pi k}$ avec $\alpha = A\cos(y) \in [0, \pi]$

$$\left(t_n, \cos\left(\frac{1}{t_n}\right)\right) = \left(t_n, \cos(\alpha + 2k\pi)\right) = \left(t_n, \cos(\alpha)\right) \to (0,y)$$

~~Soit $\alpha \in [-1,1]$ on pose $t_k = \left[A\cos\left(\frac{\quad}{\alpha + 2k\pi}\right)\right]^{-1}$ $k \in \mathbb{N}$.~~

$A\cos(1) = 0$

$$A\cos : [-1,1] \to [0,\pi] \xrightarrow{\cos} [-1,1]$$

$$y \to A\cos(y) \to \cos(A\cos(y))$$

$(t,y) \in \bar{A}$ et on pose $\left(t_n, \cos\left(\frac{1}{t_n}\right)\right) \to (t,y)$

(11)

$\bar{C}$: $(t,y) \in \bar{A}$, $\left(t_n, \cos\left(\frac{1}{t_n}\right)\right) \to (t,y)$

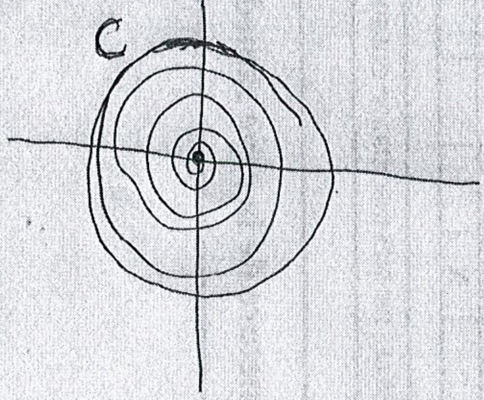
$t_n > 0 \Rightarrow$ si $t > 0$, $\cos\left(\frac{1}{t_n}\right) \to \cos\left(\frac{1}{t}\right) = y$.

$(t,y) \in A$

$\Rightarrow t = 0$, $\left|\cos\left(\frac{1}{t_n}\right)\right| \leq 1 \Rightarrow |y| \leq 1$

$(t,y) \in \{0\} \times [-1,1]$

3) $C = \left\{ \frac{t}{1+t}(\cos(t), \sin(t)) \quad t > 0 \right\}$



$\bar{C} = \{0\} \cup C \cup S^1 = \{\|x,y\| = 1\}$

$\supseteq$: $(0,0) = \lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{1+t_n}(\cos(t_n), \sin(t_n))$

avec $t_n = 1/n$. (ou $t_n \to 0$)

$(0,0) \in \bar{C}$

$C \subset \bar{C}$

$P = (\cos\theta, \sin\theta) \in S^1$

$$P = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{\theta + 2n\pi}{1+\theta+2n\pi}\left(\cos(\theta+2n\pi), \sin(\theta+2n\pi)\right)}_{\in C} \in \bar{C}$$

c:) $P \in \overline{C}$, $P_n \in C \to P$. (si $\|P\| = \alpha = 1$, $P \in S^1$) 12

simm.

$\frac{t_n}{1+t_n} = \|P_n\| \longrightarrow \|P\| = \alpha$, possible seulement si $t_n \to \frac{\alpha}{1-\alpha}$

(si $\alpha \neq 1$.

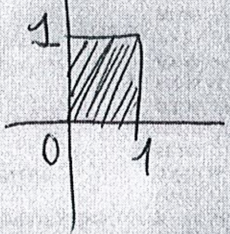
$$P = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\cos(\alpha), \sin(\alpha)\right)$$

$\alpha > 0$, $P \in C$

$\alpha = 0$, $P = 0$.

h) $D = (\mathbb{Q} \times [0,1]) \times (\mathbb{Q} \times [0,1])$

$\overline{D} = [0,1]^2$



c) $(\alpha_n, \beta_n) \in D$, $(\alpha_n, \beta_n) \to (x, y)$

on a $0 \le \alpha_n \le 1$, $0 \le \beta_n \le 1$ d'où $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$

2°) Fait (voir S3) $x \in [0,1]$, il existe $\alpha_n \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, $\alpha_n \to x$.

$\left(\alpha_n = \frac{E(nx)}{n}\right)$.

$\alpha_n = \frac{E(10^n x)}{10^n}$ développement décimal de x

Ex 10 • $U_1, \dots, U_n$ ouvert.

$x_0 \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$

pour tout i, il existe $\varepsilon_i > 0$ tq $B(x_0, \varepsilon_i[\subset U_i$

On pose $\varepsilon = \min_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i$, $\varepsilon > 0$ (car nb fini de valeurs)

$x \in B(x_0, \varepsilon[\underset{\substack{\uparrow \\ \text{pour} \\ \text{tout } i}}{\subset} B(x_0, \varepsilon_i[\subset U_i$ pdt où $x \in \bigcap U_i$

$B(x_0, \varepsilon[\subset \bigcap U_i$

• $U_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\times \mathbb{R}^{n-1}$ ouvert.

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ n'est pas ouvert.

Passage au complémentaire $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ fermé.

$\bigcup^{\infty} F_i$ pas fermé.

Exercice 11 :

1) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - 3y^2}{x^2+y^2}$ $\quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

calcul de limite partielle :

* selon l'axe des abscisses : $\forall x \neq 0$ on a

$f(x,0) = 1$ et $t \longmapsto f(t,0) = 1$

* selon l'axe des ordonnées : $\forall y \neq 0$ on a

$f(0,y) = -3$ et $t \longmapsto f(0,t) = -3$

Ainsi $f\left(\frac{1}{n+1}, 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq -3 \xleftarrow[n\to\infty]{} f\left(0, \frac{1}{n+1}\right)$.

$\therefore$ f n'a pas de limite.

2) $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

remarquer que $|x|, |y|, |z| \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$|f(x,y,z) - 0| \leq \dfrac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} = x^2+y^2+z^2 \xrightarrow[(x,y,z)\to(0,0,0)]{} 0$

$\lim_{x,y,z} f(x,y,z) = 0$.

Exercice 12.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{\Delta\}$ $\quad$ ~~où $\Delta = \{(x,y) \mid x+y=0\}$.~~

1) $\dfrac{ax^2}{x^2+a^2x^2} = \dfrac{a}{a^2+1}$ $\quad$ 2) pas de limite

Exercice 13 :

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ $\quad$ où $\Delta = \{(x,y) \mid x+y=0\}$

1) $\dfrac{ax^2}{x+ax} = ax \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ $\quad$ 2) $\dfrac{x(x^2-x)}{x^2} = x-1 \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

3) $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} \neq -1 \xleftarrow[n\to\infty]{} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right)$.

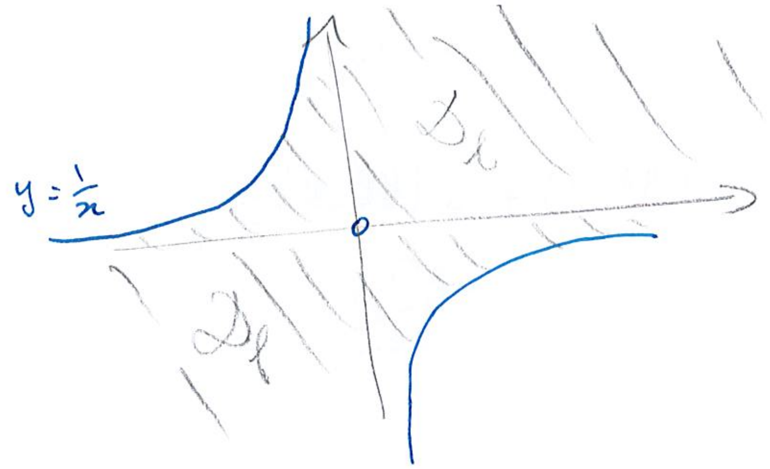
remarque : Dans tous ces exercice il faut comparer le d° du numérateur et dénominateur

Exo 14 $\mathcal{D}_f : \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

passer en polaire :

$$\left| \frac{xy + y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \left| \frac{r^2 \cos\theta \sin\theta + r^2 \sin^2\theta}{r} \right| \leq \left| \frac{r^2 + r^2}{r} \right| \underset{r \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Exo 15 $\mathcal{D}_f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} 1 + xy > 0 \\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases} \right\}$.



si $x > 0 \leadsto y > -\frac{1}{x}$

si $x < 0 \leadsto y < -\frac{1}{x}$

remarque : d° du polynome au dénominateur = 2

$\ln(1+u) = u + o(|u|) \Rightarrow$ d° au numérateur = 1

$\Rightarrow$ sans doute pas de limite.

si $y = ax$:

$$\frac{\ln(1 + ax^2)}{x^2(a+1)} = \frac{ax^2 + o(|ax^2|)}{x^2(a+1)} = \frac{a}{a+1} + \underbrace{\frac{o(|x^2|)}{|x^2|}}_{= o(1)}$$

rappel : $f = o(|x|^2) \Leftrightarrow f(x) \leq \varepsilon(x)\,|x|^2$ où $\varepsilon(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$

$\therefore$ f n'admet pas de limite en $(0,0)$

$$\lim_{n} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2} \neq \lim_{n} f\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)=\frac{2}{3}.$$

<u>Exercice 16</u> :

$$f(x,y)=\frac{\sin x-\sin y}{x-y} \qquad \Delta=\{(x,y)\ ;\ x=y\}$$

remarque : f est de la forme :

$$\frac{g(x)-g(y)}{x-y} \quad \text{où} \quad g(x)=\sin(x).$$

si $x=x_0$ est fixé on a $\dfrac{g(x_0)-g(y)}{x-y} \xrightarrow[x\to x_0]{} g'(x)=\cos(x)$

$\therefore$ Autrement dit, si la limite en un point (x_0,x_0) de Δ existe alors elle est égale à $\cos(x_0)$.

Synthèse : Soit $x_0\in\mathbb{R}$ et $(x_n,y_n)\longrightarrow(x_0,x_0)$

$$\left|f(x_n,y_n)-\cos(x_0)\right|=\left|\frac{\sin(x_n)-\sin(y_n)}{x_n-y_n}-\cos(x_0)\right|$$

$$=\left|2\,\frac{\cos((x_n+y_n)/2)\,\sin((x_n-y_n)/2)}{x_n-y_n}-\cos(x_0)\right|$$

$$=\left|2\cos\underbrace{\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right)}_{\to x_0}\underbrace{\frac{\sin(x_n-y_n/2)}{(x_n-y_n)/2}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1}-\cos(x_0)\right|$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left|f(x_n,y_n)-\cos(x_0)\right|=0$$

$\square$